$y'' = f(t, y, y')$

π.χ. $y'' + \alpha y' + by = 0$

Αν γνωρίζουμε μια λύση και κάνουμε μετασχηματισμό $y = y_1 z$

τότε έχουμε

$$y_1'' z + 2y_1' + y_1 z'' + \alpha(y_1' z + y_1 z') + by_1 z = 0.$$

$$z\underbrace{(y_1'' + \alpha y_1' + by_1)}_{0} + (2y_1')z' + y_1 z'' + \alpha y_1 z' = 0 \quad || z' = \omega$$

η εξίσωση είναι 1ης τάξης με $z' = \omega$.

άρα έχουμε $y_1 \omega' + (\alpha y_1 + 2y_1')\omega = 0 \longrightarrow \omega$

$z' = \omega \rightarrow z$

$y = y_1 z$

Με αυτήν την μέθοδο βρίσκουμε όλες τις λύσεις.

Ασκ 4 / σελ. 53

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in (-1,1), \quad y_1 = x$

Έχουμε τον μετασχηματισμό $y = zx$, $x \in (-1,1)$

τότε $(1-x^2)(z'' + 2z' \cdot 1 + 0) - 2x(z'x + z) + 2zx$

$\Rightarrow \quad (1-x^2)(z'' + 2z') - 2x^2 z' - 2xz + 2zx = 0$

$\Rightarrow \quad x(1-x^2)z'' + [(1-x^2)2 - 2x^2]z' = 0 \rightsquigarrow z' = \omega$

$\Rightarrow \quad x(1-x^2)\omega' + ((1-x^2)2 - 2x^2)\omega = 0 \rightsquigarrow \omega \rightsquigarrow z \rightsquigarrow y$

λύσεις

• Γραμμική περίπτωση

$\alpha_1 y' + \alpha_0 y = b$, $\alpha_1, \alpha_0, b \in C(I)$, $\alpha(x) \neq 0, \forall x \in I$.

• Γενική περίπτωση (όπου δεν μηδενίζεται ο συντελεστής)

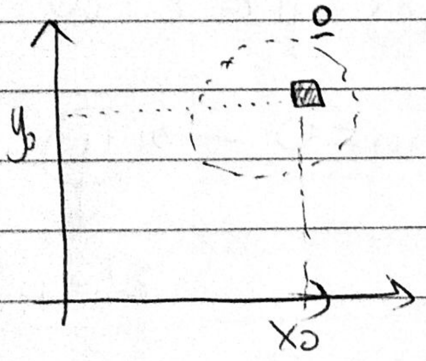
$y' = f(x,y), x \in I, x_0 \in I$.

$y(x_0) \neq y_0$

<u>παράδειγμα</u>: $2xy' + x^2y'y + 3x = 5y$ θα λύσουμε ως προς y'.

$\Rightarrow y'(2x + x^2y) = 5y - 3x$

$\Rightarrow y' = \dfrac{5y-3x}{2x+x^2y}$



Είναι τόπος

$\forall (x_0,y_0)$ υπάρχει λύση δηλ. $\exists$ ανοιχτό διάστημα ώστε να έχει πεδίο ορισμού μια λύση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΣΠΙΤΙ: Α-17 (από το φυλλάδιο)

$y' = f(x,y)$ $(x_0,y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C(\Omega)$, $f(x_0) = y_0$

<u>ορισμός</u>: θα λέμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz με σταθερά $k \geq 0$ στο $S \subseteq \Omega$ αν

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq k|y-z| \quad , (x,y),(x,z) \in S$$

π.χ) $f(x,y)=x^2+y^2 \quad ,(x,y)\in\mathbb{R}$

$|f(x,y)-f(x,z)| = |y^2-z^2| \leq k|y-z|$

↑ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

ΑΡΑ ΔΕΝ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ ΣΥΝΘΗΚΗ

Αν έχουμε $B((0,0),5)$

$$y^2 \leq x^2+y^2 \leq 5$$

$$y \leq \sqrt{5}$$

$$|f(x,y)-f(x,z)| = |y^2-z^2| \leq |y-z||y+z|$$

$$\leq (|y|+z)|y-z|$$

$$\leq (\sqrt{5}+\sqrt{5})|y-z|$$

$$=2\sqrt{5}|y-z|$$

ΛΗΜΜΑ: Ας είναι $\alpha, b>0$ και $S=\{|x-x_0|\leq\alpha, |y-y_0|\leq b\} \subseteq D_f$

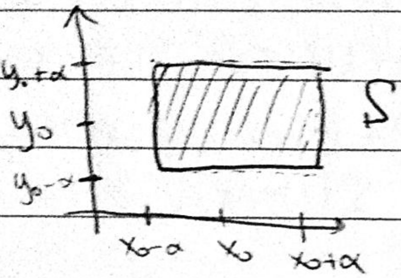
αν η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής στο S τότε η f ικανοποιεί

την συνθήκη Lipschitz στο S με σταθερά

$$k=\max_{(x,y)\in S}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$$

Παράδειγμα: $y' = e^{xy^2}$, $(x,y)\in \mathbb{R}^2$

Ισχυρίζομαι ότι $\alpha>0$, $b>0$



$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|e^{xy^2}\, 2xy\right|$$

$$\le 2\, e^{|x||y|^2}\, |x||y| \quad ①$$

$x_0 - a \le x_0 \le x_0 + a$

$y_0 - b \le y_0 \le y_0 + b$

$$① \Rightarrow \ \le 2\cdot e^{(|x_0|+a)(|y_0|+b)}\,(x_0+a)(y_0+b)$$

Λήμμα: Ας είναι $\alpha, b>0$ και $R=\{|x-x_0|\le \alpha,\ y \text{ αυθαίρετο}\} \subseteq D_f$

αν η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής και φραγμένη στο R τότε η f ικανοποιεί συνθήκη Lipshitz στο S με σταθερά $k = \sup_{(x,y)\in R} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$

Απόδειξη των λημμάτων για άσκηση στο σπίτι)

ΑΣΚΗΣΗ 9.4 σελ. 27.

$g(x,y) = x^2|y|$, $R = \{(x,y): |x| \le 1, |y| \le 1\}$

ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz?

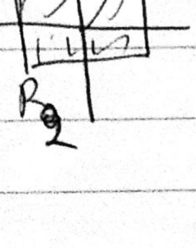
Λύση:

δεν μπορούμε να χρη-με το Λήμμα γιατι θα έχουμε πρόβλημα στην μερική παράγωγο λόγω του απόλυτου.

όμως:

Για $(x,y), (x,z) \in R$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
|g(x,y) - g(x,z)| &= |\,x|y| - x|z|\,| \\
&= |x|\,||y| - |z|| \\
&\le 1 \cdot |y - z|
\end{aligned}
$$



θα μπορούσαμε να το χωρίσουμε σε 2 διαστήματα R_1, R_2 και να ελέγχουμε

$(x,y) \in R_1, (x,z) \in R_1$

$(x,y) \in R_2, (x,z) \in R_2$

$(x,y) \in R_1$ κ' $(x,y) \in R_2$